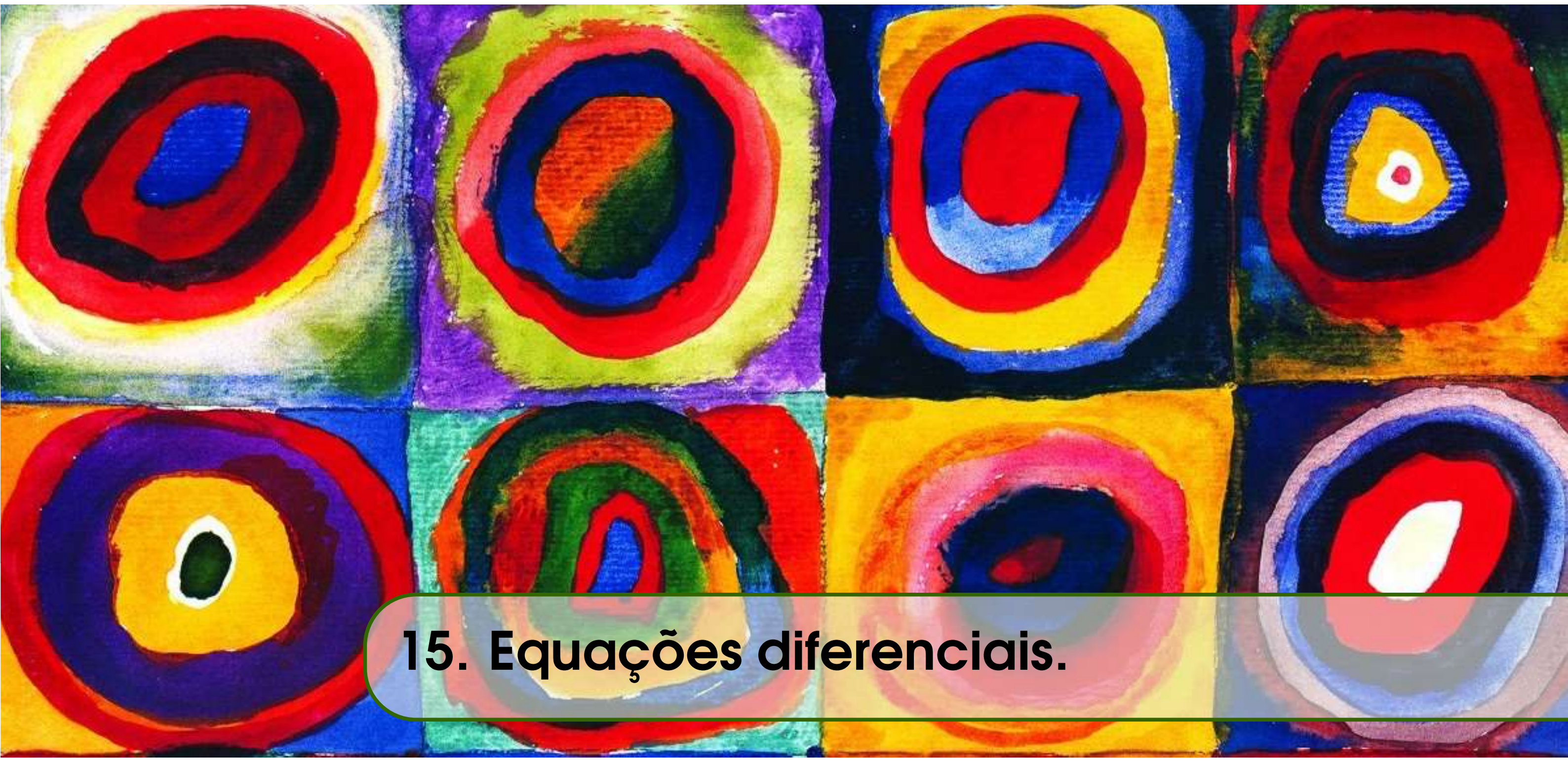

15. Equações diferenciais.

15.1 Modelos

Papel das EDOs: modelar os processos na vida real.

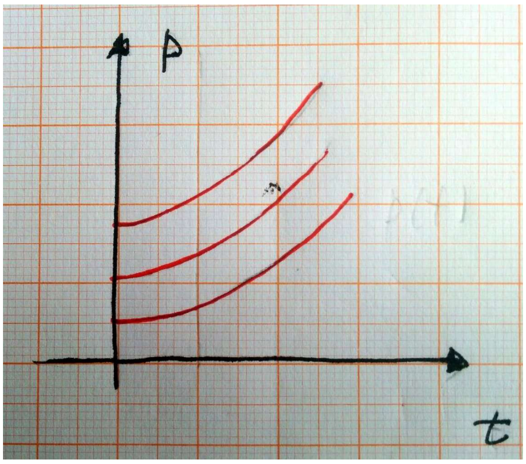

Figure 15.1: soluções do modelo (15.1) para valores do c_2 diferentes

1) **Modelo de crescimento populacional.** Seja $p(t) \geq 0$ população das bactérias no instante de tempo t. É logico que a velocidade de crescimento da população é proporcional ao população, isto é

$$\frac{dp}{dt} = kp, \tag{15.1}$$

onde k é taxa de crescimento. Solução de (15.1) é dada por:

$$p(t) = Ce^{kt}, \quad C = \text{const} \geq 0. \tag{15.2}$$

De fato, se $p \neq 0$,

$$\frac{dp}{p} = kdt$$

logo

$$\int \frac{dp}{p} = \int kdt,$$

ou seja $\ln|p| = kt + c$, assim

$$|p| = e^{kt} \cdot e^{c} = c_1 e^{kt}, c_1 > 0,$$

onde $c_1 = e^c$. Finalmente, a solução geral da equação (15.1) tem formato (como $p(t) \geq 0$ e $p(t) \equiv 0$ também é a solução da (15.1))

$$p = c_2 e^{kt}, c_2 \geq 0.$$

Observe que $p(0) = c_2$ ou c_2 é população no início. Note também que a formula (15.2) implica que $p(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$. Então modelo (15.1) não é adequado a realidade, pois recursos são limitados e população $p(t)$ não pode crescer infinitamente quando $t \to \infty$.

Na vida real:

1) $\dfrac{dp}{dt} \approx kp$ para população p relativamente pequena.

2) $\dfrac{dp}{dt} < 0$, se $p > K$ (p diminui se ela ultrapassa um certo valor K).

3) $\dfrac{dp}{dt} > 0$, se $p < K$ (p cresce se ela não ultrapassa valor K).

Logo para modelar o crescimento populacional a seguinte **equação de Verhulst** é mais relevante

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{K}\right).$$

De fato a equação de cima satisfaz as condições 1)-3).

2) **Modelo de um objeto caindo na atmosfera.**

Lembra-se, que pela 2a lei de Newton temos (veja Figura 15.2)

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v,$$

onde g é aceleração devido a gravidade, m é massa do objeto, v é velocidade do objeto, e γ é resistência do ar. Portanto

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}v, \tag{15.3}$$

Se $g - \dfrac{\gamma}{m}v \neq 0$, obtemos

$$\int \frac{dv}{g - \frac{\gamma}{m}v} = \int dt,$$

e

$$-\frac{m}{\gamma}\ln|g - \frac{\gamma}{m}v| = t + c,$$

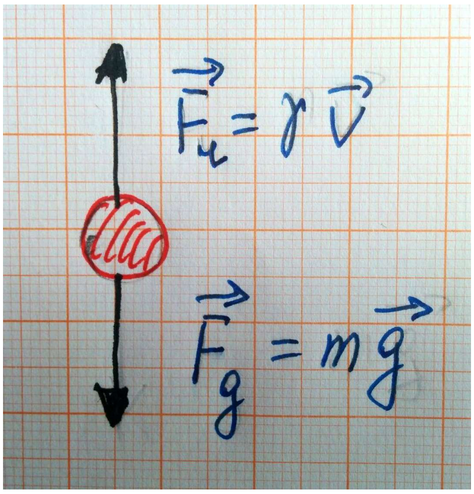

Figure 15.2: um objeto caindo na atmosfera

$$\Rightarrow \ln|g - \frac{\gamma}{m}v| = -\frac{\gamma}{m}t + c_1$$
$$\Rightarrow |g - \frac{\gamma}{m}v| = e^{\frac{-\gamma}{m}t} \cdot e^{c_1} = c_2 \cdot e^{-\frac{\gamma}{m}t}, \quad c_2 > 0,$$
$$\Rightarrow g - \frac{\gamma}{m}v = \pm c_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t} = c_3 e^{-\frac{\gamma}{m}t}, \quad c_3 \neq 0$$
$$\Rightarrow v = \frac{m}{\gamma}g + c_4 e^{-\frac{\gamma}{m}t}, \quad c_4 \in \mathbb{R},$$

Observe que a constante c_4 pode ser nula como $v = \frac{m}{\gamma}g$ também é solução da (15.3) (verifique!!).

3) **Modelo de movimento de pendulo**.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

é uma equação não linear da 2a ordem.

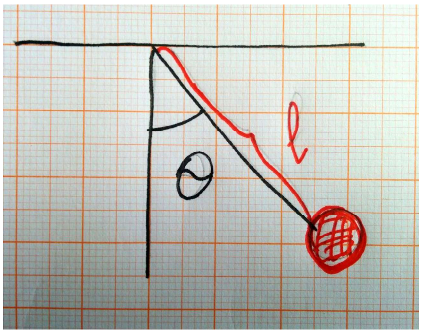

Figure 15.3: um pendulo balançando

15.2 Definições.

Definição 15.2.1 Uma EDO da ordem n é definida pelo:

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0, \tag{15.4}$$

onde F é uma função de $n+1$ variáveis.

■ **Exemplo 15.1**

$$y''' + (y'')^{100} = e^x$$

é a equação da ordem 3.

Definição 15.2.2 Se pudermos expressar $y^{(n)}$, teremos forma *normal* da EDO:

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}).$$

■ **Exemplo 15.2**

$$y^{(7)} = x\cdot e^x + y^{(6)} + y'$$

é normal.

$$\operatorname{sen}(y'') + \tan(y'') + y' - yx = 0$$

não é normal.

Definição 15.2.3 A *solução (particular)* de uma EDO no $I = (a,b)$ é uma função $y = \varphi(x)$ n-vezes derivavel em I que satisfaz (15.4).

Definição 15.2.4 *Solução geral* de (15.4) é conjunto de todas as soluções (particulares).

■ **Exemplo 15.3** Se $y'' = -y$, então

$$\begin{cases} y_1 = \operatorname{sen} x \\ y_2 = \cos x \end{cases}$$

são soluções particulares (confira!). Além disso $y = C_1y_1 + C_2y_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ é solução geral (vamos provar isso mais tarde), ou seja toda solução possível da equação $y'' = -y$ é combinação linear de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

15.3 Campo das direções

Seja $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ uma EDO da 1a ordem da forma normal. Assim $f(x,y)$ defina coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da solução da EDO ou defina um campo das direções.

■ **Exemplo 15.4**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{15.5}$$

x	0	1	1	1	0	-1	-1	-1
y	1	1	0	-1	-1	1	0	-1
$-\frac{x}{y}$	0	-1	$-\infty$	1	0	1	∞	1

Temos que (15.5) implica $\int y dy = \int -x dx$, logo

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C,$$

assim $y^2 + x^2 = C_1$, com $C_1 > 0$ é a solução na forma implícita.

$$y = \pm\sqrt{C_1 - \frac{x^2}{2}}$$

e solução na forma explicita.

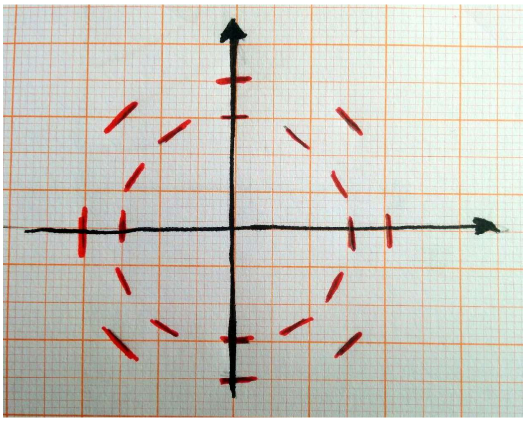

Figure 15.4: campo das direções para equação (15.5)

Observe que a Figura 15.4 ajuda adivinhar qual é a curva que representa graficamente a solução.

15.4 Problema do valor inicial (PVI).

Seja EDO da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{15.6}$$

Teorema 15.4.1 — de Cauchy ou da existência e unicidade. Suponha que f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são continuas em $A = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ e $(x_0, y_0) \in A$. Então em $I = (x_0 - h, x_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$ existe uma única solução $y = \varphi(x)$ do problema (15.6).

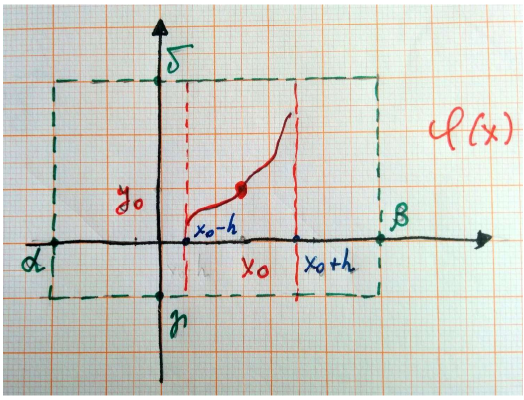

Figure 15.5: solução $\varphi(x)$ do problema (15.6) no intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$

■ **Exemplo 15.5** Ache a solução do PVI:

$$\begin{cases} y' = 5y, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Solução. Temos que $f(x,y) = 5y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 5$ são continuas em $\mathbb{R}^2$. Se $y \neq 0$, assim $\dfrac{dy}{dx} = 5y$ e

$$\int \frac{dy}{y} = \int 5dx, \Rightarrow \ln|y| = 5x + C.$$

Ou seja $|y| = e^C \cdot e^{5x} = C_1 e^x$, $\quad C_1 > 0$. Portanto

$$y = C_2 e^{5x}, \quad C_2 \neq 0.$$

Como $y(0) = C_2 e^0 = 3$, assim $C_2 = 3$. Logo

$$y = 3 \cdot e^{5x}$$

é solução do PVI. ;-)

■ **Exemplo 15.6** Ache a solução do PVI:

$$\begin{cases} y' = y^{1/3}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Solução. Para função $f(x,y) = y^{1/3}$ a derivada $\frac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y^{-\frac{2}{3}}}{3}$ **não é continua** em $y = 0$ (logo não podemos aplicar Teorema de Cauchy). Se $y \neq 0$, assim

$$\int y^{-\frac{1}{3}} dy = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = x + C \quad \Rightarrow \quad y = \pm [\frac{2}{3}(x+C)]^{\frac{3}{2}}.$$

Como $y(0) = \pm \left[\frac{2}{3} C\right]^{\frac{3}{2}} = 0$, assim $C = 0$ e

$$y = \pm \left[\frac{2}{3} x\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Note que $y \equiv 0$ também é solução do problema. É fácil ver que

$$y_{x_0} = \begin{cases} 0, \quad 0 \leq x < x_0, \\ \pm \left[\frac{2}{3}(x - x_0)\right]^{\frac{3}{2}}, \quad x \geq x_0 \end{cases}$$

é uma família das soluções do PVI (veja Figura 15.6). Então **não temos unicidade da solução do PVI**.

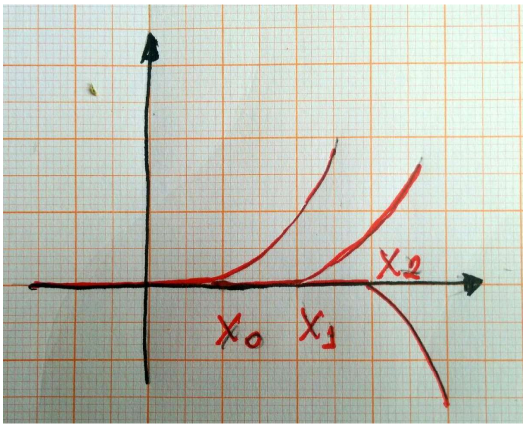

Figure 15.6: família das soluções y_{x_0}

;-)

Exemplo 15.7 Resolve PVI e ache o intervalo, onde a solução existe:

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{15.7}$$

Solução. Temos que $f(x,y) = y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ são continuas em $\mathbb{R}^2$. Agora

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \quad \Rightarrow \quad -y^{-1} = x + C \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{x+C}.$$

Como $y(0) = -\dfrac{1}{0+C} = 1$, assim $C = -1$ e

$$y = -\frac{1}{x-1}.$$

Observe que y é descontinua em $x = 1$ e $0 \in (-\infty, 1)$, portanto solução do PVI existe em $(-\infty, 1)$.
;-)

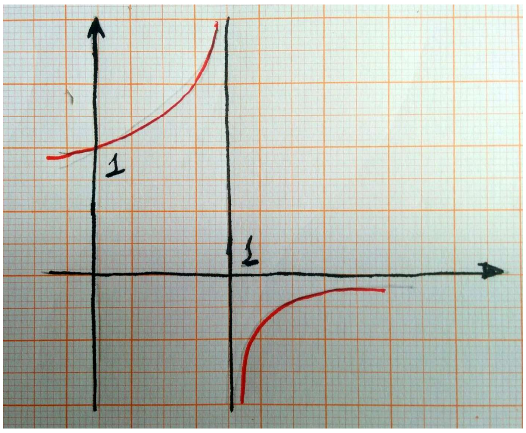

Figure 15.7: solução do PVI (15.7) existe à esquerda da reta $x = 1$